THÉORIE DES GROUPES 2024 - 25, SÉRIE 1

Exercise 1. *Le groupe des permutations S_n*

(1) Rappelez-vous de *Structures algébriques* que chaque élément de S_n peut être représenté comme un produit de cycles disjoints. Nous commençons par un échauffement rapide de la notation des cycles.

(a) Écrivez la permutation suivante en notation cyclique pour le groupe S_5 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Calculez le produit $(1\,3\,4\,5)\,(2\,6) \cdot (1\,6\,5\,2)\,(3\,4)$ dans S_6.

(c) Calculez l'inverse de la permutation $(1\,3\,4\,5)\,(2\,6)$ dans le groupe S_6.

(2) Soit p un nombre premier et soit $a \in S_n$ tel que $a^p = 1$, montrez que a peut être écrit comme un produit de cycles disjoints de longueur p.

(3) Rappelez-vous qu'une transposition dans S_n est une permutation qui peut être écrite sous la forme $(i\,j)$ avec $1 \leq i < j \leq n$.

(a) Montrez que chaque permutation dans S_n peut être écrite comme un produit de transpositions.

(b) Soient τ_i et π_i quelques transpositions dans S_n telles que

$$\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \ldots \cdot \tau_k = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \ldots \cdot \pi_l.$$

Montrez que l et k ont la même parité, c'est-à-dire $l - k = 0 \mod 2$.

(c) Les permutations qui peuvent être écrites comme un produit d'un nombre impair (respectivement pair) de transpositions sont appelées des permutations impaires (respectivement paires). Montrez qu'un m - cycle dans S_n est une permutation impaire si et seulement si m est un entier pair.

Exercise 2. *Le groupe diédral D_{2n}*

Rappelez-vous la définition du groupe diédral.

(1) Montrez que l'ensemble D_{2n} muni de la loi de composition des fonctions forme un groupe. Est-il un sous-groupe de S_n ?

(2) Montrez qu'il existe un isomorphisme $D_6 \cong S_3$ et en déduisez que D_6 n'est pas abélien ;

(3) Trouvez deux éléments $r, s \in D_6$ tels que chaque élément $x \in D_6$ peut être écrit comme une composition de r et s. Vous avez montré que D_6 est engendré par deux éléments ;

(4) Généralisez et trouvez deux éléments $r, s \in D_{2n}$ tels que chaque élément $x \in D_{2n}$ puisse être écrit comme une composition de r et s. Vous avez montré que D_{2n} est engendré par deux éléments. Plus tard dans le cours, nous verrons que D_{2n} a une *présentation* avec des générateurs r et s ;

(5) Montrez que D_{2n} n'est pas abélien pour tout $n \geq 3$;

Exercise 3. *Quelques autres exemples de groupes.*

(1) Soit $G = \{1, -1, i, -i\}$ avec la multiplication complexe. Montrez qu'il s'agit d'un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

(2) Soit K l'ensemble de tous les nombres complexes z tels que $|z| = 1$. Vérifiez que K est un groupe sous la multiplication complexe.

(3) Soit H l'ensemble de toutes les $n^{\text{ième}}$ racines complexes de l'unité, c'est-à-dire toutes les solutions de l'équation $X^n - 1 = 0$ avec $X \in \mathbb{C}$. Prouvez que G est un groupe sous la multiplication complexe qui est isomorphe au groupe cyclique $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercise 4. *Actions de groupes*

Soit $\rho : G \times X \to X$ une action de groupe. Pour tout $x \in X$, nous définissons

$$\mathrm{Stab}_G(x) = \{g \in G |\ g \cdot x = x\} \subseteq G$$

le sous-ensemble stabilisateur de G en $x \in X$.

(1) Montrez que $\mathrm{Stab}_G(x)$ est un groupe et construisez un homomorphisme de groupes injectif
$$i : \mathrm{Stab}_G(x) \to G.$$

Pour les actions suivantes, déterminez leurs groupes stabilisateurs en $x \in X$:

(2) Soit $G = S_n$ agissant sur $X = \{1, \ldots, n\}$ avec l'action de permutation. Résolvez pour tout $x \in X$.

(3) Soit $G = GL_n(K)$ le groupe des matrices inversibles muni de la multiplication matricielle, et $X = M_{n\times n}(K)$ avec l'action par multiplication $A \cdot B = AB$ pour $A \in G$ et $B \in X$. Résolvez pour $x = E_{i,j}$ et tout $x \in GL_n(K)$;

(4) Avec le même groupe et ensemble que dans le point précédent, considérez l'action de conjugaison $A \cdot B = ABA^{-1}$. Résolvez pour x une matrice scalaire, et pour x une matrice diagonale avec des entrées distinctes.

(5) L'action de multiplication à gauche $G \times G \to G$, définie par $g \cdot g' = gg'$; et l'action de conjugaison $g \cdot g' = gg'g^{-1}$. Calculez les groupes stabilisateurs de $G = S_n$ en $\sigma = (ij)$ une transposition et en $\tau = (ijk)$ un 3-cycle ; et de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en tout $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(6) Soit $G = C_2 = \{1, -1\}$ et $X = \mathbb{R}$ avec l'action donnée par la multiplication. Résolvez pour tout $x \in X$.

Exercise 5. *Quelques actions géométriques*

(1) Soit G le groupe des rotations d'un cube, montrez que $G \cong S_4$ en considérant l'action naturelle de G sur les 4 grandes diagonales du cube.

(2) Rappelez-vous que le groupe D_{2n} a une action définie sur l'ensemble des sommets d'un polygone régulier à n côtés. Le but de cet exercice est de montrer que D_{12} peut être réalisé comme un sous-groupe de S_5 en considérant une action géométrique appropriée : Soient $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ l'ensemble des sommets d'un hexagone régulier en ordre

cyclique. Par T_1 et T_2, nous désignons les triangles avec les ensembles de sommets $\{a_1, a_3, a_5\}$ et $\{a_2, a_4, a_6\}$ respectivement. Aussi, par D_1, D_2, D_3, nous désignons les grandes diagonales de l'hexagone, c'est-à-dire les segments de droite $\{a_1, a_4\}$, $\{a_2, a_5\}$, $\{a_3, a_6\}$ respectivement. Nous définissons

$$S := \{T_1, T_2, D_1, D_2, D_3\}.$$

Observez que l'action naturelle de D_{12} sur un hexagone régulier définit une action sur S et montrez que l'homomorphisme de groupes correspondant

$$D_{12} \to S_5$$

est injectif.